Question de cours

- Origine structure hyperfine $\Rightarrow$ 3 termes
  où contribution $\ell = 0$ (1er terme nul) mais int. dipôle-dipôle et terme de contact non nuls
  interactions entre m[ts] magnétiques spins $\vec{S}$ et $\vec{I}$: $\vec{\mu}_S$ et $\vec{\mu}_I$
  avec $\vec{B}$ créé par mvt électron

- SG $\Rightarrow$ Atome Ag configuration $[Kr]4d^{10}5s^1$ à travers $\vec{B}$ inhomogène
  $\vec{L} = \vec{0} \Rightarrow$ pas dévié ($m=0$)
  $\vec{F}$ subie : $\vec{F} = \mu_z \dfrac{\partial B_z}{\partial z} \vec{u}_z$
  mais $\Rightarrow$ déflexion en 2 faisceaux et rien en ligne droite en $z=0$
  $\rightarrow$ introduction du spin $\Rightarrow$ 1re mise en évidence quantification spatiale

- Effet Zeeman H 1s $\Rightarrow \ell = 0$ ds chp magnétique $\vec{B}$ uniforme. $\vec{\mu}_\ell = \vec{0}$ ($\ell=0$)
  Hamiltonien simplifié $\Rightarrow W_Z = A\,\vec{I}.\vec{S} + 2\omega_0 \hat{S}_z \Leftarrow$ mais $\vec{\mu}_S$ et $\vec{\mu}_I$
  $W_Z = -(\vec{\mu}_\ell + \vec{\mu}_S + \vec{\mu}_I).\vec{B}$ $\Rightarrow$ la contribution $\vec{\mu}_I$ très petite devant $\vec{\mu}_S$ (rapport de masse proton/électron)

(1)
$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^{\,2} = (mc)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{E}{c} = \left((mc)^2 + \vec{p}^{\,2}\right)^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \quad E = (mc^2) \cdot \left(1 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{(mc)^2}\right)^{1/2}$$

on pose $x = \dfrac{\vec{p}^{\,2}}{(mc)^2}$. On suppose $x \ll 1$.

On a $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

donc

$$E = (mc^2) \cdot \left(1 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2(mc)^2} - \frac{1}{8}\frac{\vec{p}^{\,4}}{(mc)^4} + \cdots\right)$$

$$= mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \underbrace{- \frac{1}{8}\frac{\vec{p}^{\,4}}{m^3c^2}}_{C_{mv}\,p^4} + O(p^6)$$

$\Rightarrow W_{mv} = -\dfrac{1}{8m^3c^2}$ avec $C_{mv} = -\dfrac{1}{8m^3c^2}$

② Les effets relativistes apparaissent pour :

$$|\vec{p}| \gtrsim mc$$

D'après le principe d'incertitude $\Delta x \cdot \Delta p \simeq \hbar$

cela implique des fluctuations en espace à l'échelle

$$\Delta x \simeq \frac{\hbar}{\Delta p} \lesssim \frac{\hbar}{mc}$$

③ $$W_D = \frac{\hbar^2}{8mc^2}\Delta U(r) = -\frac{\hbar^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \times 8m^2c^2}\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = +\frac{\hbar^2 e^2}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0 8m^2c^2}\cancel{4\pi}\delta(\vec{r}) = \frac{\hbar^2 e^2 \delta(\vec{r})}{8\varepsilon_0 m^2c^2}$$

$$= C_D|\psi_{n00}(0)|^2 \text{ donc } C_D = \frac{\hbar^2 e^2}{8\varepsilon_0 m^2 c^2} \qquad = \frac{\hbar^2 e^2}{8\varepsilon_0 m^2c^2}|\psi_{n00}(0)|^2$$

④ $\hat{H}_0|\psi_{n00}\rangle = E_n^{(0)}|\psi_{n00}\rangle$; $E_n^{(0)} = -\frac{E_I}{n^2}$ et $E_I = \frac{e^2}{2(4\pi\varepsilon_0)a_0}$

les intégrales $\langle\psi_{n00}|\frac{1}{r}|\psi_{n00}\rangle$ et $\langle\psi_{n00}|\frac{1}{r^2}|\psi_{n00}\rangle$ sont rappelées.

$\langle\psi_{n00}|W_{mv}|\psi_{n00}\rangle = C_{mv}\langle\psi_{n00}|p^4|\psi_{n00}\rangle$ avec $p^4 = (2m)^2\left(H_0 + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right)^2$

$$= (2m)^2\left(H_0^2 + \frac{2e^2 H_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{1}{r^2}\right)$$

ce qui donne • $$\langle\psi_{n00}|W_{mv}|\psi_{n00}\rangle = C_{mv}(2m)^2\left(E_n^{(0)2} + \frac{2e^2E_n^{(0)}}{(4\pi\varepsilon_0)}\frac{1}{a_0 n^2} + \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{2}{a_0^2 n^3}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{8m^3c^2}\right)(2m)^2 E_n^{(0)}\left(\frac{-me^4}{2\hbar^2(4\pi\varepsilon_0)^2n^2} + \frac{2e^2me^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2n^2} - \frac{4e^4m}{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2 n}\right)$$

$$= E_n^{(0)}\left(\frac{-1}{2mc^2}\right)\times\left(\frac{-me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2}\right)\left(\frac{1}{2n^2} - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n}\right) = E_n^{(0)}\frac{\alpha^2}{n^2}(2n - 3/4)$$

• $$\langle\psi_{n00}|W_D|\psi_{n00}\rangle = C_D|\psi_{n00}(0)|^2 = \frac{\hbar^2e^2}{8\varepsilon_0 m^2c^2}\times\frac{1}{\pi a_0^3 n^3} \quad \text{avec } a_0 = \frac{(4\pi\varepsilon_0)\hbar^2}{me^2}$$

$$= -E_n^{(0)}\frac{\alpha^2}{n^2}$$

⑤ $$\frac{\Delta E_{n00}}{E_n^{(0)}} = \frac{\alpha^2}{n^2}\left(2n - \frac{3}{4} - 1\right) = \frac{\alpha^2}{4} = \frac{1}{4(137)^2} \quad \text{car } n=1 \Rightarrow \frac{\Delta E_{n00}}{E_n^{(0)}} \sim 1{,}3\,10^{-5}$$

Étude de la désexcitation de l'état $2s$ de l'hydrogène

Effet Stark

a. $W_S = -\vec{D}.\vec{\mathcal{E}} = q\,z\,\mathcal{E} = q\,\mathcal{E}\,r\,\cos\theta$

$\langle n\ell, m_\ell | H_0 | n\ell', m'_\ell \rangle = E_n\,\delta_{\ell,\ell'}\,\delta_{m_\ell,m'_\ell}$

$\langle n\ell, m_\ell | W_S | n\ell', m'_\ell \rangle \equiv q\,\mathcal{E}\,\langle R_{n,\ell} | r | R_{n,\ell'} \rangle \, \langle Y_\ell^{-m_\ell} | \cos\theta | Y_{\ell'}^{-m'_\ell} \rangle$

$\langle Y_0^0 | \cos\theta | Y_0^0 \rangle = 0;\quad \langle Y_1^{-m_\ell} | \cos\theta | Y_1^{m'_\ell} \rangle = 0$

$\langle Y_0^0 | \cos\theta | Y_1^{\pm 1} \rangle = 0;\quad \langle Y_0^0 | \cos\theta | Y_1^0 \rangle = 1/\sqrt{3}$

$\langle R_{2,0} | r | R_{2,1} \rangle = -3\,a_0\,\sqrt{3}$

$\langle 2s | W_S | 2s \rangle = 0;\quad \langle 2p | W_S | 2p \rangle = 0$

$\langle 2s | W_S | 2p, m_\ell = \pm 1 \rangle = 0;\quad \langle 2s | W_S | 2p, m_\ell = 0 \rangle = -3\,a_0\,q\,\mathcal{E}$ ....

$\hbar\omega_S = 3\,a_0\,q\,\mathcal{E} = 2,5 \times 10^{-27}\,\mathrm{J} = 1,6 \times 10^{-8}\,\mathrm{eV}$

$\omega_S = 2,5 \times 10^{-27}\,\mathrm{J}/1,054 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js} = 2,4 \times 10^{7}\,\mathrm{s}^{-1}$ ....

b. 4 états. Les états $|2p, m_\ell = \pm 1\rangle$ sont états propres dégénérés de $H_0 + W_S$ avec valeur propre :

$\langle 2p, m_\ell = \pm 1 | (H_0 + W_S) | 2p, m_\ell \rangle = E_2$

$E_2 = -Ry/4 = -5,45 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} = -3{,}4\ \mathrm{eV}$. ....

Les deux autres états propres résultent de la diagonalisation de la matrice $H_0 + W_S$ dans le sous-espace 2x2 des états $|2s\rangle$ et $|2p, m_\ell = 0\rangle$:

$|\psi_+\rangle = (1/\sqrt{2})\,[|2s\rangle + |2p, m_\ell = 0\rangle];\quad E_+ = E_2 - \hbar\omega_S$ ....

$|\psi_-\rangle = \left[1/\sqrt{2})\,(|2s\rangle - |2p, m_\ell = 0\rangle\right];\quad E_- = E_2 + \hbar\omega_S$ ....

c. $\Gamma_+ = \Gamma_- = \Gamma_{2p}/2 = 3,1 \times 10^{8}\,\mathrm{s}^{-1}$. ....

Les deux autres états non perturbés se désexcitent avec un taux $\Gamma_{2p} = 6,2 \times 10^{8}\,\mathrm{s}^{-1}$. ....

Tous les états seront désexcités pendant la durée de l'expérience ($T_{exp} \simeq \times 10^{-5}$ s). ....